DI Dr. techn. Klaus LEEB klaus.leeb@surfeu.at

# Verbrauch Audi A3 2.0 TDI

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  **Prozessrechnung, geschlossener Prozess, SEILIGER-Vergleichsprozess**

- Kurzzusammenfassung

  **Dieselmotor: Das Beispiel soll die Leistungssteigerung eines Dieselmotors durch Aufladung verdeutlichen. Entsprechende Daten des Motors wurden der Zeitschrift "Auto-Motor-Sport" entnommen. Anhand des Fahrschaubildes können die momentanen Leistungsdaten des Motors (Drehzahl, Leistung, Drehmoment) sowie die konstruktiven Parameter (Verdichtungsverhältnis, Bohrung, Hub, Hubraum usw.) zur Berechnung herangezogen werden.**

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  **Prozessrechnungen auf dem Gebiet der Verbrennungsmaschinen haben eher einen theoretischen Charakter. Dennoch kann man grundlegene Überlegungen und Simulationen anstellen und durchführen, die das Verständnis für die einzelnen Fachgebiete fördern. Das Einhalten der tatsächlichen thermodynamischen Größen gelingt bei dieser Berechnung nur teilweise, da viel zuviele Größen unbekannt sind, bzw. durch Messungen ermittelt werden müßten. Die Anhaltswerte für den Druck und die Temperatur aus dem Lehrbuch "Grohe: Otto- und Dieselmotoren" wurden jedoch weitgehend eingehalten. Es soll daher nur der Nachweis erbracht werden, dass durch einen Turbolader die Leistung gesteigert bzw. der Verbrauch gesenkt werden kann.**

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  **z.B: Angewandte Mathematik, 5.Jahrgang, Maschineningenieurwesen**

- Mathcad-Version:

  **Mathcad 11**

- Literaturangaben:

  **H. Grohe "Otto- und Dieselmotoren", ISBN 3 - 8023 - 1559 - 6,Vogel-Fachbuch**

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  **Diese Aufgabe wurde vom Autor als Vorbereitung für die Reifeprüfung gestellt und in den Labor- bzw. Rechenübungen mit den Schülern durchgeführt.**

# Verbrauch eines Audi A3 TDI 2.0 - Turbodiesel

Definition von Nicht - SI-Einheiten:

$\text{bar} := 10^5 \cdot \text{Pa}$ $\text{kJ} := 10^3 \cdot \text{J}$ $\text{kmol} := 10^3 \cdot \text{mol}$ $\text{Liter} := \text{l}$

$°\text{C} := \text{K}$ $T0 := 273.15 \cdot \text{K}$ $\text{ms} := 10^{-3} \cdot \text{s}$ $\text{Gramm} := \text{gm}$

Aus dem Datenblatt "Auto-Motor-Sport" entnommene Daten:

4 Zylindermotor $z_{Zyl} := 4$ Verbrauch: zwischen 4.5 und 7.2 Liter/100km

Gesamthubraum $V_H := 1968 \cdot \text{cm}^3$

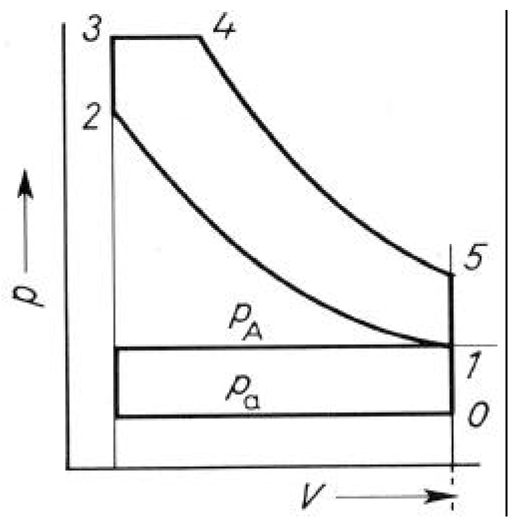
Verdichtungsverhältnis $\varepsilon := 18$

Hubraum eines Zylinders $V_h := \frac{V_H}{z_{Zyl}}$ $V_h = 492\,\text{cm}^3$

Kolbendurchmesser $D_{Kolben} := 81 \cdot \text{mm}$ Hub $s_{Hub} := 95.5 \cdot \text{mm}$

Maximaler Ladedruck: $p_1 := 1.2 \cdot \text{bar}$

**Daten bei 90km/h im 5.Gang** Drehzahl $n_M := 1590 \cdot \frac{1}{\text{min}}$ Leistung $P_{90} := 61 \cdot \text{kW}$




Vorgangsweise: Seiligerprozess

1) 0-1: Turbolader: isentrope Verdichtung
2) 1-2: Verdichtungstakt: isentrope Verdichtung
3) 2-3: Gleichraumverbrennung
4) 3-4: Gleichdruckverbrennung
5) 4-5: Arbeitstakt: isentrope Expansion
6) 5-1: Ladungswechsel: isochore Wärmeabfuhr

Anhaltswerte aus "Grohe"

"3": p~30 bis 50 bar und t ~ 700°C
"4" p~60 bis 100 bar und t ~ 2000°C

Gesteuert wird dieser Druck über den Brennstoffanteil der Gleichdruck und der Gleichraumverbrennung sowie über das einstellbare Luftverhältnis λ

Annahmen: Ansaugzustand p=0.7bar t=20°C

Brennstoff - Diesel : Brennwert $H_u := 43000 \cdot \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

Welche Arbeit gibt ein Zylinder pro Arbeitsspiel ab?

Arbeitsspiel = 2 Umdrehungen 720°

Zeit für eine Umdrehung $\Delta t_{Spiel} := \frac{1}{n_M}$ $\Delta t_{Spiel} = 0.038\,s$ $A_{V1Zyl} := \frac{P_{90}}{z_{Zyl}} \cdot \Delta t_{Spiel}$

$A_{V1Zyl} = 575.5\,J$ (Anm: dieser Wert soll am Ende der Rechnung annähernd durch Variation der Parameter erreicht werden!)

Ansaugzustand $p_0 := 0.7 \cdot bar$ $t_0 := 20°C$ $T_0 := t_0 + T0$ $T_0 = 293.15\,K$

Maximaler Ladedruck $p_1 := 1.2 \cdot bar$ (lt. Datenblatt)

**Stoffeigenschaften der Luft**

Molare Masse $M_L := 28.96 \cdot \frac{kg}{kmol}$ Universelle Gaskonstante $R_M := 8314.41 \cdot \frac{J}{kmol \cdot K}$

Spezielle Gaskonstante $R_L := \frac{R_M}{M_L}$ $R_L = 287.1 \frac{J}{kg \cdot K}$

Isentropenexponent $\kappa := 1.4$

Spezifische Wärmekapazitäten $c_p := \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot R_L$ $c_v := \frac{R_L}{\kappa - 1}$

$c_p = 1004.8 \frac{J}{kg \cdot K}$ $c_v = 717.7 \frac{J}{kg \cdot K}$

Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = \frac{V_h + V_c}{V_c}$ $V_c := \frac{V_h}{(\varepsilon - 1)}$

Schadraum $V_c = 28.941\,cm^3$ Das ist das verbleibende Volumen im oberen Totpunkt

# Seiliger - Prozess

**0 -1 : Isentrope Verdichtung** Verdichtung der Luft durch Verdichter des Turboladers

$p_0 \cdot v_0 = R_L \cdot T_0$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "0"

$p_1 \cdot v_1 = R_L \cdot T_1$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "1"

$p_0 \cdot v_0^{\kappa} = p_1 \cdot v_1^{\kappa}$ Zustandsänderung: "Isentropengleichung

$v_0 := \frac{R_L \cdot T_0}{p_0}$ $v_1 := \left(\frac{p_0 \cdot v_0^{\kappa}}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$ $T_1 := \frac{p_1 \cdot v_1}{R_L}$ $t_1 := T_1 - T0$

$v_1 = 0.818 \frac{m^3}{kg}$ $t_1 = 68.806\,°C$ $p_1 = 1.2\,bar$ Zustandsgrößen nach dem Turbolader

**Verdichtungstakt: 1-2: isentrope Kompression**

Aus dem Hubraum kann die im Zylinder befindliche Luftmasse berechnet werden.

$p_1 \cdot \frac{V_1}{m_{Luft}} = R_L \cdot T_1$ $V_1 := V_h + V_c$ $m_{Luft} := p_1 \cdot \frac{V_1}{(R_L \cdot T_1)}$

Luftmasse im Zylinder $m_{Luft} = 0.637\,Gramm$

Aus dem Schadraum kann man das spezifische Volumen im Punkt 2 berechnen. $V_2 := V_c$ $v_2 := \frac{V_2}{m_{Luft}}$

$p_1 \cdot v_1 = R_L \cdot T_1$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "1"

$p_2 \cdot v_2 = R_L \cdot T_2$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "2"

$p_0 \cdot v_0^{\kappa} = p_1 \cdot v_1^{\kappa}$ Zustandsänderung: "Isentropengleichung

$q_{12} + a_{v12} = u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1)$ 1. Hauptsatz für geschlossene Prozesse

$a_{v12} = \int_{v_1}^{v_2} p(v)\,dv$ spezifische Volumsänderungsarbeit

Lösung des Gleichungssystems

$T_2 := T_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa-1}$ $p_2 := p_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa}$ $t_2 := T_2 - T0$

$v_2 = 0.045 \frac{m^3}{kg}$ $p_2 = 68.638\,bar$ $t_2 = 813.475\,°C$ Zustandsgrößen nach dem Verdichtungstakt

Volumsänderungsarbeit für's Verdichten

$a_{v12} := -\int_{v_1}^{v_2} p_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\kappa} dv$ $A_{v12} := a_{v12} \cdot m_{Luft}$ $a_{v12} = 534.486 \frac{kJ}{kg}$ $A_{v12} = 340.332\,J$

Kontrolle durch 1. Hs: $a_{v12\_Kontr} := c_v \cdot (T_2 - T_1)$ $a_{v12\_Kontr} = 534.486 \frac{kJ}{kg}$

**2- 3: isochore Verbrennung: Gleichraum-Verbrennung**

Die Verbrennung wird in 2 Abschnitte aufgeteilt: ein Teil des Brennstoffs wird isochor und der andere isobar verbrannt

$p_2 \cdot v_2 = R_L \cdot T_2$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "2"

$p_3 \cdot v_3 = R_L \cdot T_3$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "3"

$v_2 = v_3$ Zustandsänderung: isochor

$q_{12} + a_{v12} = u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1)$ 1. Hauptsatz für geschlossene Prozesse

$a_{v12} = \int_{v_1}^{v_2} p(v)\, dv$ spezifische Volumsänderungsarbeit

Anmerkung: $a_{v23} = 0$ da v = konst $A_{v23} := 0 \cdot J$

**Ermittlung des zugeführten Brennstoffs:**

Momentanes Luftverhältnis $\lambda_{momentan} := 2.0$ Diesen Wert soll man variieren

$L_{min} := 14.7$ $m_{Bges} := \frac{m_{Luft}}{\lambda_{momentan} \cdot L_{min}}$

$m_{Bges} = 2.17 \times 10^{-2}\,Gramm$

Dieser gesamte Brennstoffbedarf wird aufgeteilt: in einen Anteil Gleichraum- und einen Anteil Gleichdruckverbrennung

$anteil := 0.30$ 30% Gleichraumverbrennung

Brennstoffanteil Gleichraum $m_{B23} := anteil \cdot m_{Bges}$

Brennstoffanteil Gleichdruck $m_{B34} := (1 - anteil) \cdot m_{Bges}$

Zugeführte Wärme Gleichraumverbrennung $Q_{zu23} := m_{B23} \cdot H_u$ $Q_{zu23} = 0.279\,kJ$

$q_{zu23} := \frac{Q_{zu23}}{m_{Luft}}$ $q_{zu23} = 438.78 \frac{kJ}{kg}$

Zugeführte Wärme Gleichdruckverbrennung $Q_{zu34} := m_{B34} \cdot H_u$ $Q_{zu34} = 0.652\,kJ$

$q_{zu34} := \dfrac{Q_{zu34}}{m_{Luft}}$ $q_{zu34} = 1023.81\,\dfrac{kJ}{kg}$

Lösung des Gleichungssystems:

$q_{23} = c_v \cdot (T_3 - T_2)$ $T_3 := \dfrac{q_{zu23}}{c_v} + T_2$ $p_3 := p_2 \cdot \dfrac{T_3}{T_2}$ $v_3 := \dfrac{R_L \cdot T_3}{p_3}$ $t_3 := T_3 - T0$

$v_3 = 0.045\,\dfrac{m^3}{kg}$ $p_3 = 107.252\,bar$ $t_3 = 1425\,°C$ Zustandsgrößen nach der Gleichraumverbrennung

### 3- 4: isobare Verbrennung: Gleichdruck - Verbrennung

$p_3 \cdot v_3 = R_L \cdot T_3$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "3"

$p_4 \cdot v_4 = R_L \cdot T_4$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "4"

$p_3 = p_4$ Zustandsänderung: isobar

$q_{12} + a_{v12} = u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1)$ 1. Hauptsatz für geschlossene Prozesse

$a_{v12} = \int_{v_1}^{v_2} p(v)\, dv$ spezifische Volumsänderungsarbeit

Lösung des Gleichunssystems

$q_{zu34} = c_v \cdot (T_4 - T_3) - a_{v34}$ $a_{v34} = -p_3 \cdot (v_4 - v_3)$ $p_4 := p_3$

**Lösung durch "Lösungsblock"** Schätzwerte $T_4 := T_3$ $v_4 := v_3$

Vorgabe

$p_4 \cdot v_4 = R_L \cdot T_4$

$q_{zu34} = c_v \cdot (T_4 - T_3) + p_3 \cdot (v_4 - v_3)$

$Lös := Suchen(T_4, v_4)$ $T_4 := Lös_{0,0}$ $v_4 := Lös_{1,0}$ $t_4 := T_4 - T0$

$v_4 = 0.0727\,\dfrac{m^3}{kg}$ $t_4 = 2.444 \times 10^3\,°C$ $p_4 = 107.252\,bar$ Zustandsgrößen nach der Gleichdruckverbrennung

$a_{v34} := -p_3 \cdot (v_4 - v_3)$

$a_{v34} = -292.517 \frac{kJ}{kg}$ $A_{v34} := a_{v34} \cdot m_{Luft}$ $A_{v34} = -186.259\,J$ Abgegebene Volumsänderungs-arbeit

**Expansionstakt: 4-5: isentrope Expansion**

$p_4 \cdot v_4 = R_L \cdot T_4$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "4"

$p_5 \cdot v_5 = R_L \cdot T_5$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "5"

$p_4 \cdot v_4^{\kappa} = p_5 \cdot v_5^{\kappa}$ Zustandsänderung: "Isentropengleichung"

$q_{45} + a_{v45} = u_5 - u_4 = c_V \cdot (T_5 - T_4)$ 1. Hauptsatz für geschlossene Prozesse

$a_{v45} = \int_{v_4}^{v_5} p(v)\,dv$ spezifische Volumsänderungsarbeit

$v_5 := v_1$ Siehe p-v Diagramm

$p_5 := p_4 \cdot \left(\frac{v_4}{v_5}\right)^{\kappa}$ $T_5 := T_4 \cdot \left(\frac{p_5}{p_4}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ $v_5 := \frac{R_L \cdot T_5}{p_5}$ $t_5 := T_5 - T0$

$v_5 = 0.818 \frac{m^3}{kg}$ $t_5 = 758.7\,°C$ $p_5 = 3.621\,bar$ Zustandsgrößen nach dem Expansionstakt

$a_{v45} := -\int_{v_4}^{v_5} p_4 \cdot \left(\frac{v_4}{v}\right)^{\kappa} dv$ $a_{v45} = -1209.4 \frac{kJ}{kg}$ $A_{v45} := a_{v45} \cdot m_{Luft}$ $A_{v45} = -0.77\,kJ$

Kontrolle $a_{v45\_Kontr} := c_V \cdot (T_5 - T_4)$ $a_{v45\_Kontr} = -1209.4 \frac{kJ}{kg}$

### 5- 1: isochore Wärmeabfuhr Simulation des Ladungswechsels

$p_5 \cdot v_5 = R_L \cdot T_5$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "5"

$p_1 \cdot v_1 = R_L \cdot T_1$ Zustandsgleichung für ideale Gase im Punkt "1"

$v_5 = v_1$ Zustandsänderung: Isochor

$q_{45} + a_{v45} = u_5 - u_4 = c_v \cdot (T_5 - T_4)$ 1. Hauptsatz für geschlossene Prozesse

$a_{v45} = \int_{v_4}^{v_5} p(v)\, dv = 0$ spezifische Volumsänderungsarbeit

$A_{v51} := 0 \cdot J$ $q_{51ab} := c_v \cdot (T_1 - T_5)$

$q_{51ab} = -495.152 \frac{kJ}{kg}$ $Q_{51ab} := q_{51ab} \cdot m_{Luft}$ $Q_{51ab} = -0.315\, kJ$

## Welche Gesamtarbeit verrichtet ein Zylinder?

### Summe der einzelnen Volumsänderungsarbeiten

$A_v := A_{v12} + A_{v23} + A_{v34} + A_{v45} + A_{v51}$ $A_v := |A_v|$

$A_v = 616\, J$ Diese Arbeit ergibt sich aus der Berechnung des Prozesses

$A_{v1Zyl} = 575.5\, J$ Diese Arbeit wurde aus dem Datenblatt errechnet = Zielwert!

Welche Leistung von allen Zylindern in einem Arbeitsspiel abgegeben?
Es zünden bei einem 4-Zylinder Motor immer 2 Zylinder pro Umdrehung

Leistung des Motors: 4 Zylinder $P_M := \frac{A_v \cdot z_{Zyl}}{\Delta t_{Spiel}}$ $P_M = 65.297\, kW$

Dieser Wert sollte ca. dem des Datenblattes entsprechen !

### Wie viele Liter Diesel pro 100 km bei 90 km/h und 5. Gang und $n_M$=1590Umin

$s_{ges} := 100 \cdot km$ $v_{ges} := 90 \cdot \frac{km}{h}$ $\Delta t := \frac{s_{ges}}{v_{ges}}$ $\Delta t = 66.667\, min$ Zeit für 100 km bei 90km/h

Wieviele Arbeitsspiele erfolgen für einen Zylinder $N_{Spiel} := \frac{\Delta t}{2 \Delta t_{Spiel}}$ $N_{Spiel} = 5.3 \times 10^4$

$m_{Diesel} := m_{Bges} \cdot N_{Spiel}$ $m_{Diesel} = 1.148\,kg$

Gesamtverbrauch $m_{Diesel\_ges} := z_{Zyl} \cdot m_{Diesel}$ $m_{Diesel\_ges} = 4.592\,kg$

Annahme $\rho_{Diesel} := 840 \cdot \frac{kg}{m^3}$ $V_{Diesel} := \frac{m_{Diesel\_ges}}{\rho_{Diesel}}$ $V_{Diesel} = 5.466\,Liter$

Thermischer Wirkungsgrad $Q_{zu} := Q_{zu23} + Q_{zu34}$

$\eta_{th} := \frac{A_V}{Q_{zu}}$ $\eta_{th} = 66.145\,\%$ $\eta_{th1} := 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}$ $\eta_{th1} = 68.53\,\%$

Anmerkungen: Es soll nun überprüft werden, ob der Turbo etwas bringt.

Dabei soll beachtet werden, dass möglichst alle Parameter bis auch den Ladungsdruck konstantgehalten werden sollen --> damit wird eine gewisse Vergleichbarkeit geschaffen.

Simulation ohne Turbolader: den Ladedruck = Ansaugdruck setzen, und dann durch Parametervariation versuchen, dieselbe Leistung zu erreichen. Danch kann der Verbrauch verglichen werden.